

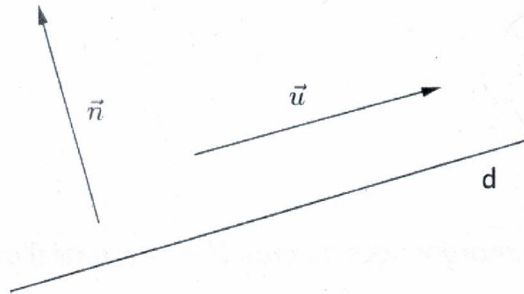
Chapitre 15 : Géométrie repérée

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite (d) .

On appelle **vecteur normal** à une droite (d) , un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (d) .



Exemple :

Soit la droite (d) d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.

Déterminons un vecteur normal à (d) .

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ c-à-d $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ normal à (d) , on a :
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' = 0$
 $x' = -\frac{2}{3}y'$

Propriétés :

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a; b)$ pour vecteur normal.

Démonstration :

- Soit $A(x_A; y_A) \in (d)$, ayant pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
 $M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$
 $\Leftrightarrow \vec{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
 $\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$
 $\Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$

- Réciproquement,
 $\vec{n}(d) : ax + by + c = 0$
 $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de (d)
 $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -b \times a + a \times b = 0$

Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la droite (d) passant par le point $A(-5; 4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3; -1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .

$\vec{n}(3; -1)$ normal à (d) donc :

$$(d) : 3x - y + c = 0$$

$$A(-5; 4) \in (d) \Leftrightarrow 3 \times (-5) - 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 19$$

$$(d) : 3x - y + 19 = 0$$

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite (d) d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur la droite (d) .

$\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ normal à (d)

soit $H(x; y)$

$\vec{AH}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y-4 \end{smallmatrix}\right)$

$$\det(\vec{n}; \vec{AH}) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & x-2 \\ 3 & y-4 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1(y-4) - 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 2 = 0$$

comme $H \in (AH) \cap (d)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y - 10 = 0 & (*) \times 3 \times (2) \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 3 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

II. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r est :
 $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Démonstration :

Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}(A; r)$

$$AM = r$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \| \vec{AM} \|^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

Exemple 1 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère le cercle C de centre $A(4; -1)$ et passant par le point $B(3; 5)$.

Déterminer une équation du cercle C .

$$r^2 = AB^2$$

$$= \|\vec{AB}\|^2$$

$$= (-1)^2 + 6^2$$

$$= 37$$

$$\mathcal{C} : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 37$$

Exemple 2 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
 $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

E est le cercle de centre $A(1; 5)$ et de rayon 3